Université Paul Sabatier de Toulouse, année universitaire 2006-2007

CIMP, PHYSIQUE

Corrigé sommaire de l'Épreuve CC1, en section A, du 10 novembre 2006

A. Questions de cours (5 points)

i) La constante G est la constante de gravitation, c est la constante d'Einstein identifiée à la vitesse de propagation de la lumière dans le vide, h est la constante de Planck, rapport constant entre l'échange d'un quantum d'énergie, entre une onde monochromatique et la matière, et la fréquence ν de cette onde :$G = 6,672\,59 \times 10^{-11}\,\mathrm{N.m^2.kg^{-2}}$

$$c = 2,997\,924\,58 \times 10^{8}\,\mathrm{m.s^{-1}} \qquad h = 6,626\,068\,76(52) \times 10^{-34}\,\mathrm{J.s}$$

ii) Les trois grandes théories physiques sont : la gravitation universelle, la relativité et la physique quantique.
iii) La dimension physique de la quantité demandée est obtenue selon :

$$\mathrm{Dim}\left(\frac{\hbar G}{c^3}\right) = [\mathrm{E}][\mathrm{T}][\mathrm{F}][\mathrm{M}]^{-2}[\mathrm{L}]^2[\mathrm{L}]^{-3}[\mathrm{T}]^3 = [\mathrm{T}]^4[\mathrm{F}]^2[\mathrm{M}]^{-2} = [\mathrm{L}]^2$$

Ainsi, $(\hbar G/c^3)^{1/2}$ est homogène à une longueur, appelée longueur de Planck, qui vaut $l_P = 1,6 \times 10^{-35}$ m.

B. Problème (15 points)

Vitesse de chute des gouttes d'eau dans un nuage

1. a) L'équation aux dimensions de la viscosité est :

$$[\eta] = [F][L]^{-1}[V]^{-1} = [F][L]^{-2}[T] = [M][L][T]^{-2}[L]^{-2}[T] = [M][L]^{-1}[T]^{-1}$$

On l'exprime donc soit en Pa.s soit en $\mathrm{kg.m^{-1}.s^{-1}}$
b) On en déduit la dimension de Re :

$$[Re] = [\rho_a][v][L][\eta]^{-1} = [M][L]^{-3}[L]^2[T]^{-1}[M]^{-1}[L][T] = [1]$$

"Le reynolds" est donc un nombre sans dimension, ici de valeur :

$$Re = \frac{\rho_a v L}{\eta} = \frac{1,3 \times 40 \times 10^{-6} \times 10}{1,8 \times 10^{-5}} = 28,9$$

2. a) Comme on néglige la poussée d'Archimède, la deuxième loi de Newton appliquée au mouvement de la goutte d'eau, par rapport au référentiel terrestre $\mathcal{R}$, donne :

$$m\mathbf{a} = m\mathbf{g} - \alpha\mathbf{v} \quad \text{soit} \quad \frac{\mathrm{d}\mathbf{v}}{\mathrm{d}t} + \frac{\alpha}{m}\mathbf{v} = \mathbf{g}$$

b) En projetant selon la verticale descendante, on obtient l'équation différentielle suivante :

$$\dot{v} + \frac{v}{\tau} = a \quad \text{avec} \quad \tau = \frac{m}{\alpha} = \frac{m}{6\pi\eta r} \quad \text{et} \quad a = g$$

c) La solution de l'équation différentielle précédente est :

$$v = \text{Cte} \times \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) + g\tau \quad \text{soit} \quad v = g\tau\left[1 - \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)\right]$$

En effet, comme à l'instant pris comme origine la vitesse est nulle, Cte $= -g\tau$.
En faisant $t\infty$, on voit que la vitesse v tend vers une valeur limite :

$$v_l = g\tau = \frac{mg}{6\pi\eta r} = \frac{2r^2\rho_e g}{9\eta} = 43,6\,\mu\text{m.s}^{-1} \quad \text{d'où} \quad \tau = \frac{v_l}{g} = 4,84\,\mu\text{s}$$

La vitesse limite constante correspond à l'opposition des forces de pesanteur et de frottement, soit à l'égalité :

$$mg = \alpha v_l \quad \text{ce qui donne} \quad v_l = \frac{mg}{\alpha} = g\tau$$

D'après ces résultats, la vitesse des grosses gouttes est plus grande que celle des petites gouttes. Les grosses se trouvent donc à la base du nuage.

d) Le tracé soigné du graphe $v(t)$ ne pose de problème : le point d'intersection de la tangente à l'origine a pour ordonnée $g\tau$ et pour abscisse τ.

3. a) Si l'on ne néglige pas la poussée d'Archimède, la deuxième loi de Newton donne :

$$m\mathbf{a} = m\mathbf{g} - m'\mathbf{g} - \alpha\mathbf{v} \quad \text{soit} \quad \frac{\mathrm{d}\mathbf{v}}{\mathrm{d}t} + \frac{\alpha}{m}\mathbf{v} = \mathbf{g}\left(1 - \frac{m'}{m}\right) \quad \text{avec} \quad \frac{m'}{m} = \frac{\rho_a}{\rho_e}$$

Ainsi, l'équation différentielle précédente n'est modifiée que par le facteur $(1-\rho_a/\rho_e)$ affectant l'accélération g.

b) On en déduit aisément la valeur de la vitesse limite de chute des gouttes d'eau dans le nuage :

$$v_{l,A} = \frac{mg(1-\rho_a/\rho_e)}{\alpha} = \frac{2r^2 g\rho_e(1-\rho_a/\rho_e)}{9\eta}$$

c) L'erreur relative systématique que l'on fait sur la vitesse de chute des gouttes d'eau en négligeant la poussée d'Archimède est donc :

$$\frac{v_l - v_{l,A}}{v_l} = \frac{\rho_a}{\rho_e} = \frac{1,3}{1000} \quad \text{soit} \quad 0,13\%$$